גבול במובן הרחב:

אם לכל החל מ n מסויים מתקיים:   
אם לכל החל מ n מסויים מתקיים:

הוכיחו: גבול במובן הרחב הוא יחיד.

הוכחה: נניח בשלילה שלא. נחלק למקרים:  
1. מכאן עבור כל קיים כך שלכל מתקיים: ,  
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:  
בפרט עבור הטענה אמורה להתקיים.  
אבל לכל מתקיים:  
קיבלנו: - סתירה.

2. ,   
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:   
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:  
בפרט הטענות נכונות עבור:   
מכאן לכל :. קיבלנו: - סתירה.  
3. ,   
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:   
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:  
בפרט הטענות נכונות עבור:   
מכאן לכל :. קיבלנו: - סתירה.

4. ,   
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:   
עבור כל קיים כך שלכל מתקיים:   
בפרט הטענות נכונות עבור:   
מכאן לכל :. קיבלנו: - סתירה.

טענה: אם לכל וגם אז   
הוכחה: יהא כלשהו. צ"ל: קיים כך שלכל מתקיים: .  
לפי הנתון, קיים כך שלכל מתקיים: .  
מכאן: החל מ:

טענה: אם וגם חסומה מלרע אזי .  
הוכחה: יהא כלשהו. צ"ל: קיים כך שלכל מתקיים: .  
חסומה מלרע ולכן: לכל .

לפי הנתון, קיים כך שלכל מתקיים: .  
מכאן: החל מ: .

טענה: אם יורדת במובן הרחב ולא חסומה מלרע אזי .

הוכחה: יהא כלשהו. צ"ל: קיים כך שלכל מתקיים: .  
נניח בשלילה שלא קיים איבר הקטן מ . מכאן: לכל ומכאן חסם מלרע - סתירה לנתון.  
לכן בהכרח קיים איבר . ומכיוון שהסדרה יורדת במובן הרחב, לכל מתקיים: .

תתי סדרות:

אם סדרה אז תת סדרה.

גבול חלקי - גבול של תת סדרה (ייתכן שלסדרה המקורית אין גבול)  
משפט BW: אם סדרה חסומה אז בהכרח יש לה גבול חלקי (ניתן להרכיב מתוכה תת סדרה שכן יש לה גבול)

משפט: הוא גבול חלקי של אם ורק אם אינה חסומה מלעיל.  
כיוון 1: נניח ש הוא גבול חלקי של ולכן קיימת תת סדרה כך ש . לכן לכל קיים כך שלכל מתקיים: . צ"ל: אינה חסומה מלעיל.  
נניח בשלילה שקיים חסם A לסדרה. כלומר, . מכאן: לפי הנתון, קיים כך שלכל מתקיים:   
בפרט אבל הוא איבר בסדרה המקורית - סתירה.  
כיוון 2: נניח שאינה חסומה מלעיל.  
נבנה באינדוקציה (שלב אחרי שלב) את תת הסדרה .  
בסיס: ניקח את

צעד: נניח שבנינו את תת הסדרה : כאשר: . נראה כיצד לבחור את האיבר הבא (k+1). נתבונן על הסדרה המקורית החל ממקום . לפי ההנחה, אנו לוקחים בכל שלב את האיבר הראשון לפי הסדר שיותר גדול מכל מה שלקחנו עד כה ולכן גדול מכל איברי הסדרה המקורית עד מקום . נניח בשלילה שהוא גם יותר גדול או שווה מכל האיברים בהמשך הסדרה - א הוא חסם עליון - סתירה לנתון שאין חסם עליון. לכן קיים איבר במיקום אחרי הגדול מ , ניקח את הראשון בסדר שמקיים זאת להיות . קיבלנו תת סדרה ששואפת לאינסוף. (היא עולה ולא חסומה)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | טענת "לכל" - | טענת "קיים" - |
| כשאתם מתבקשים להוכיח את הטענה | יהא x כלשהו... | נבחר/נגדיר x=.... |
| כשאתם צריכים להפריך את הטענה | דוגמא נגדית: x=... | יהא x כלשהו.... (מראים בהמשך שהוא לא מקיים את הטענה) |
| כשהטענה כבר נכונה ורוצים רק להשתמש בה (נתון שהיא מתקיימת) | מותר לבחור x ספציפי וכמובן הטענה תהיה נכונה עבורו | מותר להניח שקיים x כזה אך לא ניתן (בדר"כ) להגדיר משהו ספציפי (כללי) |